# EVALUATION D'UNE OBLIGATION INDEXEE SUR LE TEC

## PARIS, JUIN 2018


**Comité de Normalisation Obligataire/The French Bond Association**
Association régie par la loi du 1er juillet 1901
8 rue du Mail 75002 Paris
http://www.cnofrance.org

# Evaluation d'une obligation indexée sur le TEC

On imagine une obligation avec des coupons indexés sur le TECn (TECn+ marge fixe) et émis par un émetteur dont le Zspread par rapport à l'Euribor 6 mois est connu.

On désigne par n l'indice du TEC (n=10 pour du tec 10)

m la marge fixe

z le zspread.

La valeur actuelle de l'obligation coupon inclus égale la somme des valeurs présentes des coupons et du principal actualisés sur une courbe de swaps contre 6 mois "shiftée" de z.

En ce qui concerne le principal :

Pas de difficulté

En ce qui concerne les coupons :

l'usage est qu'ils sont payés trimestriellement et que la caractère actuariel (taux payé une fois par an en base 365/365) est préservé.

Autrement dit, si TECn est le fixing du tec (celui qui est publié par le CNO), le coupon couvrant le trimestre à venir égale [(1+TECn/100+m/100)^(1/4)-1]*Nominal.

La valeur espérée de ces flux se calcule en deux étapes.

- 1ère étape: calcul en probabilité swap neutre.
- 2ème étape: ajustement de convexité pour passer en probabilité forward neutre.

## *1ère étape*

Pour calculer l'espérance d'un TEC devant fixer à une date à venir, il faut disposer d'une courbe, c'est à dire de données et d'un algorithme permettant de calculer la valeur présente de 1€ à une date à venir. Dans l'exercice qui nous occupe, on peut envisager 3 courbes devant donner à peu près le même résultat :

- Courbe 1: une courbe cash avec des BTF puis des OAT
- Courbe 2: une courbe constituée des fixings du TEC (le TEC à 1 an, le TEC2 à 2 ans...)
- Courbe 3: une courbe de swaps contre Euribor 3 ou 6 mois. Cette courbe donnera non pas des TEC forward mais des Constant Maturity Swaps que l'on pourra dans un deuxième temps relever ou diminuer pour approcher un TEC.

### La méthode 1 présente un avantage et deux inconvénients:

l'avantage est qu'il n'y a pas de "pollution" des calculs avec des calculs intermédiaires et arbitraires comme des interpolations. Les inconvénients sont la complexité de l'algorithme, la dépendance du résultat au choix des points de courbe et la possibilité d'obtenir des résultats aberrants si la courbe de départ n'est pas suffisamment régulière.

### La méthode 2 a un gros avantage et un inconvénient:

l'avantage est la simplicité de l'algorithme, comparable à celui que la CNO a exposé au sujet de la publication de la courbe de taux zéros. L'inconvénient est l'enchainement des interpolations susceptibles d'affecter la précision du résultat

### La méthode 3 a un avantage et un inconvénient:

l'avantage est que les courbes de swaps sont très régulières (au bénéfice de la pertinence des CMS), l'inconvénient étant que les spread TEC-CMS est tout sauf régulier et maitrisable .

Il semble que dans le cadre du CNO, la méthode 2 qui s'appuie sur des résultats intermédiaires que nous publions et le meilleur compromis.

C'est donc celle-ci que nous allons commenter.

Etape 1.1: calculer par interpolation tous les TEC manquants (8 ans, 9 ans, 11 ans, jusqu'à 29 ans)

Etape 1.2: calculer les discounts factors par "bootstrapping" à horizon 1 an, 2 ans.... 30 ans

Etape 1.3: en déduire des taux zéros à ces échéances

Etape 1.4: si l'horizon auquel on calcule le DF tombe à un horizon qui n'est pas un nombre entier d'années (par exemple 5.25 années), on interpole les taux zéros aux échéances entières qui encadrent cet horizon et on calcule ensuite le DF.

On dispose maintenant d'une courbe et l'on cherche à calculer un TECn démarrage en date h (pour horizon).

On calcule les PV (h), pv(h+1)...,pv(h+n)

TEC n,h doit satisfaire la contrainte suivante: PV (h)= TECn,h * (pv (h+1)+....pv(h+n)) +pv(h+n),

Ainsi, TECn,h = (pv (h)-pv(h+n)) / (pv (h+1)+....pv(h+n)))

## *2ème étape*

Le TEC fwd calculé à ce stade (en probabilité swap neutre) est le coupon d'une obligation à départ h et échéance h+n qui vaut le pair.

Le propriétaire d'une obligation bénéficie d'un effet de convexité par rapport au taux de rendement:

- lorsque les taux baissent la sensibilité augmente (en valeur absolue) et il gagne de plus en plus et
- lorsque les taux montent, la sensibilité diminue et il perd de moins en moins.

Celui qui reçoit le fixing du TEC n'a pas le bénéfice de cette convexité.

La contrainte n'est donc pas que l'obligation de coupon TEC (en probabilité forward neutre) vaille le pair, mais le pair moins la valeur de la convexité. Ainsi, en faisant les hypothèses

- que le prix est une fonction affine du taux (au voisinage du rendement espéré) dont la pente est l'opposé de la sensibilité
- que la convexité est constante
- et que le TEC est distribué selon une loi normale de variance h* BP*BP

TEC F neutre= TEC S Neutre + Conv/sen* h * BP*BP/2

Il suffit ainsi d'ajuster à la hausse les calculs précédents de Conv/sen* h * BP*BP/2.

BP dépend en théorie de h et n.

On peut l'estimer à partir des matrices de volatilités absolues de swaptions ou le fixer arbitrairement à la volatilité du 10 ans dans 10 ans. Cet ajustement, bien que matériel, n'est pas très important: de l'ordre de 1% (en prix) pour une obligation à 10 ans indexées sur le TEC 10.

### *Méthode alternative simplifiée applicable lorsque les taux sont bas*

On modélise la courbe des FRA comme croissant régulièrement de TC (taux court) à TF (taux forward) entre 0 et 10 ans, puis étant stable au-delà de à 10 ans. On néglige délibérément l'impact de l'actualisation pour simplifier l'analyse le plus possible.

T10Y est la moyenne des FRA entre 0 et 10Y. Les poids de TC et TF dans une moyenne sur 10 ans s'équilibrent. Ainsi, T10Y=(TC+TF)/2

Le 10Y dans 10Y vaut TF. Le 20Y est la moyenne de T10Y et de TF, soit

T20Y=(T10Y+TF)/2 et

T20Y=(TC+3*TF)/4

Réciproquement, on peut calibrer TC et TF (connaissant T10Y et T20Y)

TF= 2*T20Y- T10Y

TC= 3*T10Y- 2*T20Y

Relations de Pentes

TF-TC= 4* (T20Y-T10Y).

la pente des forward est égale à 4 fois la pente mesurée entre le 10 ans et le 20Y

La moyenne du TEC10 sur 10 ans est [5/6*TF+1/6*TC] (car le calcul fait intervenir une moyenne de h^2, d'où la primitive en h^3/3 et l'apparition du facteur 6. Le spread entre une obligation payant TEC10 et une obligation payant le taux court est

Spread TEC10 <=> (5/6*TF+1/6*TC)-(TF+TC)/2, soit Spread TEC10 <=>(TF-TC)/3.

Comme TF-TC <=> 4* (T20Y-T10Y), Spread TEC10 <=>(T20Y-T10Y)*4/3.

Dans la pratique, dès que les taux sont supérieurs à 1%, l'approximation selon laquelle TF= 2*T20Y-T10Y est trop approximative.

Il faut substituer **TF=(T20Y*S20Y- T10Y*S10Y)/ (TS20Y- S10Y),** avec S10Y et S20Y les sensibilités à 10Y et 20Y

Et l'approximation du spread TEC (hors ajustement de convexité) devient

**Spread TEC10 <=> (T20Y-T10Y)* S20Y)/ (S20Y-S10Y) *2/3.**

Le spread d'une émission TEC10 par rapport à une émission à taux variable combine 3 éléments :

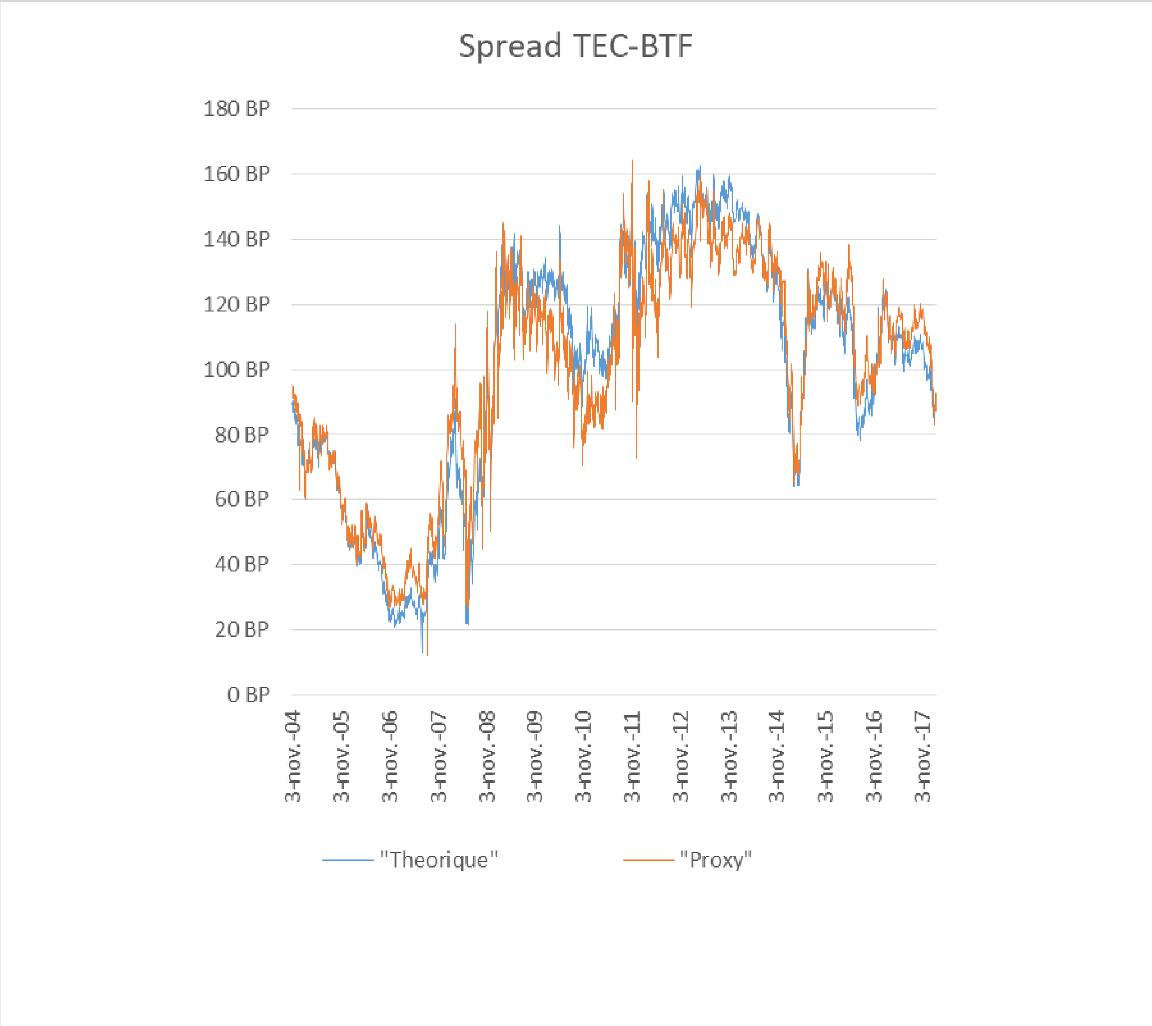
- la courbe:
  effet réducteur du spread égal à (T20Y-T10Y)*S20Y/ (S20Y-S10Y)*2/3 (si l'émission est à 10 ans)
- la convexité:
  effet réducteur du spread égal à [M(Index)*M(Emission)]* [Volatilité absolue]*[Volatilité absolue]/4
- le spread OAT:
  effet majorant du spread égal à S Index-T Index avec S index = swap de maturité échéance de l'indice et T Index, rendement e l'OAT à échéance de l'indice.

## *Back Testing*

Un back testing sur 13Y montre que la formule approchée est en général assez fiable. L'écart en BP arrondi à la dizaine la plus proche est réparti comme suit

| Proxy-Theo | % |
|---|---|
| -30 BP | 0.2% |
| -20 BP | 9.8% |
| -10 BP | 22.5% |
| 0 BP | 34.6% |
| 10 BP | 29.8% |
| 20 BP | 3.0% |
| 30 BP | 0.1% |

La probabilité que l'erreur arrondie soit nulle ou égale à 10 BP en valeur absolue est de 85%.




## *Remarque sur le spread 10Y-20Y*

Un swap receveur de TF pendant 10 ans vaut S (pour subvention) = (TF-T10Y)*10.

Or TF=2*T20Y-T10Y

Donc S <=>2* (T20Y-T10Y)

S est assez stable dans le temps, en ligne étroite avec le degré de subvention (effective et anticipée) que donne et donnera la banque centrale par rapport à une politique qui consisterait à mettre les taux à TF. En Europe, S est stable autour de 10%.

Il n'est pas étonnant que le spread 10Y 20Y soit stable autour de 0.50%.