



Méthode universelle de valorisation des obligations indexées sur l'inflation.

Auteur : Jean-Pierre Hélias-Directeur Hiram-Finance www.hiram-finance.com

Table des matières

Stripping des OAT indexées	1
Fongibilité des zéro-coupons et montants ajustés	2
Conclusion	4
Pricing des zéro-coupons indexés	4
Rappel : stripping théorique d'une obligation nominale	4
Stripping des obligations indexées sur l'inflation	5
Exemple	7
Courbe d'actualisation	7
Courbes d'inflations	8
Spreads de crédit	10
Pricing des ZC	11

Stripping des OAT indexées

Les avancées de la modélisation financière ont permis d'élaborer et de valoriser des produits calibrés au plus près des attentes des différents investisseurs sur toutes les classes d'actifs et sur toute la gamme de l'activité financière. Cette course à l'innovation s'est surtout concentrée sur le développement de produits toujours plus sophistiqués mais on peut tout de même mentionner quelques mouvements de simplification de produits financiers traditionnels en composants élémentaires. La finalité étant bien entendu de réassembler ces éléments unitaires au mieux des intérêts des investisseurs.

Le stripping d'obligations fait partie de ces innovations « simplificatrices », il consiste à autoriser le découpage de la séquence de flux composant une obligation ordinaire en une série de flux négociables de façon indépendante (démembrement) et réciproquement (remembrement). La procédure comptable est relativement simple, elle consiste simplement à créditer le book dépositaire des/du titres créés et à le débiter du/des titres nécessaires à la transformation. La valorisation arbitrée des titres entrant dans le processus : obligation, coupons et flux de principal, peut en revanche constituer un problème surtout lorsque les flux élémentaires issus de plusieurs obligations différentes deviennent fongibles après démembrement comme c'est le cas sur les OAT (Obligations Assimilables du Trésor).

Ce problème a depuis longtemps été résolu par l'ensemble des SVT (Spécialistes des Valeurs du Trésor) pour les obligations à taux fixe (autorisées au démembrement en 1991) mais suscite moins d'intérêt



pour ce qui concerne les obligations indexées sur l'inflation (bien qu'autorisées au démembrement depuis Avril 2007). On peut d'une part craindre que des strips (obligations démembrées) de taux réels risquent de cumuler l'illiquidité des strips de taux fixe et des obligations de taux réel, ce qui serait peu encourageant pour les institutions chargées d'assurer la liquidité du marché ; et d'autre part souligner un surcroît de complexité de pricing peu propice à la démocratisation du produit. L'article suivant ne propose pas de réponse aux problèmes de liquidité mais développe une méthode simple de pricing des obligations démembrées qui pourra aisément mise en œuvre par les institutions intéressées par ce produit.

A cette date il n'existe pas cotations de référence pour les taux réels qui soient consultables chez les diffuseurs habituels d'information boursière. Compte tenu des niveaux actuels des taux, il est possible qu'il n'y en ait pas avant longtemps. L'intérêt de la démarche proposée ici tient plutôt à son universalité : elle permet de déterminer le prix arbitré des zéro-coupons réels et par extension de toute combinaison linéaire de zéro-coupons réels en intégrant les niveaux de taux nominaux, d'inflation et de crédit/liquidité propres à un émetteur donné. Elle permet donc de valoriser toutes les obligations indexées sur l'inflation.

Fongibilité des zéro-coupons et montants ajustés

L'ajustement des montants démembrés est un mécanisme indispensable pour assurer la fongibilité des zéro-coupons compte tenu du mode de calcul des obligations indexées sur l'inflation.

Ce mécanisme n'a pas d'équivalent pour ce qui concerne les obligations nominales : démembrer 100M€ d'obligations payant un coupon fixe de x% revient à substituer à une ligne de 100M€ du titre initial une ligne de 100M€ + x M€ d'un zéro coupon de même échéance que le titre initial (on ne distingue plus les zéro-coupons issus des flux de coupons de ceux issus du flux de principal) et n-1 lignes de x M€ de zéro-coupons de mêmes échéances que les n-1 premiers coupons du titre initial. Les données du nominal et du taux coupon suffisent pour calculer les montants de titres à créer/reconstituer et aucun ajustement n'est nécessaire.

Le mode de calcul des obligations indexées sur l'inflation assure que le nominal du titre évolue comme les indices d'inflation. La valeur réelle des titres (en devise constante) est simplement multipliée par la performance de l'indice d'inflation entre la date d'émission et la date de transaction. Le nominal étant lié à une performance il en résulte que les opérations de démembrement / remembrement seront-elles mêmes conditionnées par la performance de l'inflation.

Remarques

L'indice utilisé est généralement une version mise en forme (paramétrage contractuel) de l'indice publié brut. On ne détaillera pas ici tous les types de formatage des indices d'inflation bruts pour en faire des indices applicables aux transactions mais on peut brièvement en évoquer les principaux :

- Ajout d'un décalage temporel (lag) : indispensable compte tenu du délai nécessaire aux organismes économiques pour calculer et publier les indices correspondant à une période d'observation (généralement un mois calendaire). Les lags observés se situent généralement à deux ou trois mois.



- Lissage de l'indice : les transactions sont quotidiennes mais les indices sont publiés à une fréquence plus faible (mensuelle ou semi-mensuelle) et font apparaître une discontinuité à chaque publication. Les indices utilisés pour valoriser les transactions peuvent donc être lissés (interpolation linéaire) afin d'éviter les sauts de valorisation. On note que ce type de lissage est parfois présent sur les obligations (ex. RQI : ratio quotidien d'inflation pour les OATi) mais plus rarement sur les produits dérivés vanille.
- Désaisonnalisation : les indices d'inflation peuvent être éminemment saisonniers, on y retrouve au fil des ans des fluctuations régulières correspondant à des événements économiques ponctuels récurrents (soldes ...). Des traitements visant à répartir l'inflation sur l'année calendaire sont parfois mis en œuvre sur les produits dérivés mais restent exceptionnels sur les obligations.

Pour conserver la fluidité de l'exposé on ne particularisera pas les traitements effectivement appliqués aux indices d'inflation et on notera génériquement $IPC(t)$ (Indice Préconditionné pour les Calculs) l'indice formaté applicable aux flux échangés en date t .

La performance de l'inflation entre la date d'émission e_0 et t s'écrit $\frac{IPC(t)}{IPC(e_0)}$.

Le nominal inflaté correspondant à K M€ de titres émis en date e_0 est donc égal à $K \cdot \frac{IPC(t)}{IPC(e_0)}$ (M€) tandis que le nominal inflaté correspondant à K M€ de titres émis en date t_1 est égal à $K \cdot \frac{IPC(t)}{IPC(e_1)}$ (M€).

Les montants de zéro-coupons créés lors d'un démembrement doivent bien évidemment refléter l'écart observable entre les nominaux inflatés sans toutefois créer de différence entre les zéro-coupons issus de démembrements réalisés à des dates différentes : $IPC(t)$ vs $IPC(t')$. Il faut donc masquer l'impact des inflations initiales sans intégrer l'inflation courante.

La solution apparaît en réécrivant le nominal inflaté sous la forme $\left(K \cdot \frac{100}{IPC(e_0)}\right) \cdot \frac{IPC(t)}{100}$.

On appelle *nominal ajusté de base 100*, la valeur $\tilde{K} = K \cdot \frac{100}{IPC(e_0)}$.

Elle correspond au nominal non inflaté d'un titre indexé sur l'inflation dont la base d'inflation est égale à 100.

Remarques

- Si les zéro-coupons issus du démembrement du titre de base $IPC(e_0)$ doivent être remboursés en titre de base $IPC(e_1)$, le nominal remboursé se déduit de l'égalité des nominaux ajustés : $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_0$. Soit, en montant nominaux non inflatés :

$$K_1 = K_0 \cdot \frac{IPC(e_1)}{IPC(e_0)}$$

La nouvelle base de calcul de ces zéro-coupons post remboursement est bien évidemment celle du titre reconstitué c'est-à-dire $IPC(t_1)$.

- Des changements de base sont réalisés périodiquement par les organismes en charge des mesures d'inflation afin de ramener les indices courants sur des niveaux proches de 100. Les nominaux ajustés dépendent complètement du niveau de base des indices de prix, ils doivent donc être recalculés après chaque rebasing de l'indice.

Si le niveau initial $IPC(e_0)$ est modifié en $IPC'(e_0)$ dans la nouvelle base, le nominal ajusté devient :



$$K'_0 = K_0 \cdot \frac{IPC(e_0)}{IPC'(e_0)}$$

- Les taux faciaux des obligations indexées étant généralement faibles, i.e. 0.1% sur les OATi récemment émises, les montants de coupon obtenus par démembrement sont eux-mêmes extrêmement faibles, i.e. 100k€ pour 100M€ dans le cas d'un coupon de 0.10%, ce qui pose un réel problème de liquidité des strips indexés en dehors des maturités de remboursement.

Conclusion

Par analogie avec les titres nominaux, on peut écrire pour les obligations indexées sur l'inflation :

Démembrer K M€ (nominal à l'émission) d'obligations indexées de base $IPC(e_0)$ et de coupon $x\%$ revient à substituer à une ligne de K M€ du titre initial une ligne de K M€ d'un zéro coupon de même échéance que le titre initial et n lignes de $\tilde{K} \cdot x\%$ M€ de zéro-coupons de mêmes échéances que les coupons du titre initial.

La base des zéro-coupons créés est égale à 100 et $\tilde{K} = \left(K \cdot \frac{100}{IPC(e_0)} \right)$.

On notera, que dans le cas des OAT indexées, principal et coupons ne sont pas fongibles du fait de l'option de protection du capital portée seulement par le principal.

Pricing des zéro-coupons indexés

Les montants de titres créés connus, il reste à en déterminer les valeurs de négociation. Plusieurs approches sont envisageables : courbe de crédit *standalone*, asset-swaps, Z-spread, ... Bien que le Z-spread soit de calcul un peu moins direct (donnée implicite), nous retiendrons cette méthode suffisamment précise pour nos besoins de pricing spot et prolongeable par des modèles de crédit plus sophistiqués le cas échéant ; si on néglige les aspects liés à la liquidité (cash et repo) des différents actifs, un Z-spread est assimilable à un CDS spread de recovery 0%.

Rappel : stripping théorique d'une obligation nominale

On dispose de deux courbes

- Une courbe d'actualisation réputée sans risque (€ster, ois, ...) qui à toute maturité associe un taux sans risque $r(t_0; t)$ ou un facteur d'actualisation $\delta(t_0; t)$ (valeur présente d'une unité monétaire payée en date T).

$$t \rightarrow \delta(t_0; t) = e^{-(t-t_0) \cdot r(t_0; t)}$$

- Une courbe de Z-spreads unitaires qui pour un émetteur donné associe un spread de crédit à toute flux de maturité t et Θ_0 les paramètres de cette courbe.

$$t \rightarrow zs(\Theta_0, t_0; t)$$

Par construction, la relation suivante doit être vérifiée pour chaque obligations O_j de l'ensemble de calibration :

$$Prix_i(t_0) = \sum_{k=1}^{n_i} x_i \cdot e^{-(t_k^i - t_0) \cdot [r(t_0; t_k^i) + zs(\Theta_0; t_0; t_k^i)]} + 100 \cdot e^{-(t_{n_i}^i - t_0) \cdot [r(t_0; t_{n_i}^i) + zs(\Theta_0; t_0; t_{n_i}^i)]}$$

Où $Prix_i$ est le prix de marché (coupon attaché) exprimé en pourcentage, x_i le taux nominal, n_i le nombre de coupons attachés et $\{t_k^i; k = 1 \dots n_i\}$ les dates de tombées de coupon.

On déduit la valeur d'un zéro-coupon de maturité t du même émetteur :



$$V(t_0; t) = e^{-(t-t_0) \cdot [r(t_0; t) + z_s(\Theta_0; t_0; t)]}$$

Remarques

- Les paramètres Θ_0 définissant la courbe de Z-spread sont presque toujours déduits du système d'équations résultant de l'application de la relation d'équilibre à chaque obligation de l'ensemble de calibration.
- La forme de la courbe de Z-spreads n'est pas contrainte, la plus simple est discontinue (constante par morceaux) mais on peut aussi la choisir continue (affine par morceaux) voire continument dérivable (splines, fonctionnelles ...) ... suivant l'utilisation qui en est faite.
- Le nombre de paramètres peut excéder le nombre de relations disponibles (le nombre de titres de l'ensemble de calibration) et des hypothèses supplémentaires peuvent être nécessaires : i.e. détermination exogène pente du premier segment pour une courbe affine par morceaux ...
- Lorsque le nombre de paramètres est inférieur au nombre de relations disponibles le calcul classique du lagrangien permet de déterminer la courbe de crédit minimisant la distance à l'ensemble de calibration.
- Compte tenu de la nature théorique des prix de zéro-coupons recherchés (les prix négociés différent des prix théoriques notamment en raison des disparités de liquidité entre zéro-coupons et obligations classiques), de la relative instabilité des Z-spreads et de l'utilisation envisagée (prix spots, pas de forwards ni de diffusion), une courbe constante par morceaux calée sur les prix des obligations est généralement suffisante.
- La prise en compte d'ajustements de convexité applicables aux zéro-coupons de maturité non présentes dans le set de calibration nécessiterait de modéliser la diffusion du Z-Spread ce qui dépasserait le cadre de cette étude.

Stripping des obligations indexées sur l'inflation

Les deux courbes utilisées pour le stripping des obligations nominales ne suffisent plus et on y adjoint une courbe d'inflation :

$$t \rightarrow IPC(t_0; t)$$

On ne rentre pas ici dans les détails de la construction d'une telle courbe qui, par degrés croissants de raffinement, sera basée sur :

- Les cotations de swaps zéro-coupon inflation (annuel) - minimum
- Un modèle de saisonnalité dont la calibration repose le plus souvent sur les cotations de spreads calendaires (mensuels) et les données passées – nécessaire lorsque la saisonnalité est marquée
- Les ajustements de convexité applicables aux maturités non égales à celles des swaps zéro-coupon – pas forcément matériel lorsque l'IPC de référence est connu (standard pour les obligations indexées)

On suppose simplement que l'outil d'évaluation intègre l'ensemble des conventions et pratiques propre au marché d'inflation considéré et est en mesure de fournir le niveau d'IPC qui convient pour les titres à démembrer. On ne distingue pas non plus les IPC déterministes (indices basés sur des inflations déjà publiées) des IPC cotés sur le marché.



Dans le cas des obligations indexées, avec les mêmes notations que pour les obligations nominales, la relation d'équilibre des montants nominaux devient compte tenu des bases d'inflations différentes entre obligations et zéro-coupons :

$$K \cdot \text{Prix}_i(t_0) \cdot \frac{IPC(t_0)}{IPC(e_0)} = \tilde{K} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_i} x_i \cdot \frac{IPC(t_0; t_k^i)}{100} \cdot e^{-(t_k^i - t_0) \cdot [r(t_0; t_k^i) + z_s(\Theta_0; t_0; t_k^i)]} + 100 \cdot \frac{IPC(t_0; t_{n_i}^i)}{100} \cdot e^{-(t_{n_i}^i - t_0) \cdot [r(t_0; t_{n_i}^i) + z_s(\Theta_0; t_0; t_{n_i}^i)]} \right)$$

En remarquant que $\tilde{K} = K \cdot \frac{100}{IPC(e_0)}$ puis en factorisant par le ratio d'IPC à la date de transaction, on en déduit la valeur réelle d'un zéro-coupon indexé de maturité t :

$$VR(t_0; t) = \frac{IPC(t_0; t)}{IPC(t_0)} \cdot e^{-(t-t_0) \cdot [r(t_0; t) + z_s(\Theta_0; t_0; t)]}$$

Cette valeur correspond bien à la performance escomptée de l'inflation sur la durée de vie résiduelle du titre actualisée conformément au crédit de l'émetteur.

La valeur nominale des zéro-coupons rebasés à 100 étant égale à :

$$VN(t_0; t) = \frac{IPC(t_0; t)}{100} \cdot e^{-(t-t_0) \cdot [r(t_0; t) + z_s(\Theta_0; t_0; t)]}$$

Pour des raisons d'homogénéité avec l'ensemble du marché inflation il paraît opportun de coter conformément aux pratiques du marché considéré (i.e. en valeur réelle en Europe et en valeur nominale en Grande-Bretagne).

Remarques

- Pour des raisons liées aux différences de liquidité entre obligations nominales et obligations indexées il paraît peu opportun de reporter les niveaux de Z-spreads calculés pour les obligations nominales sur les obligations indexées.
- S'ils devaient être modélisés, les ajustements de convexité applicables aux Z-spreads devraient inclure non seulement les impacts dus aux corrélations crédit / taux nominal mais aussi aux corrélations crédit / inflation
- L'ensemble des remarques déjà énoncées pour les obligations nominales est applicable aux obligations indexées.



Exemple

Un exemple a été complètement calculé afin d'illustrer la démarche. Il est basé sur les obligations indexées sur l'inflation émises par le Trésor français qui sont effectivement éligibles au démembrement. Les données utilisées pour l'exemple ont été collectées le 30/07/2021.

Les résultats disponibles ci-dessous restent illustratifs d'une démarche et la feuille de calcul associée ne saurait être utilisée dans l'état comme support de transactions (i.e. le calendrier des jours fériés se limite aux week-ends, la saisonnalité a été simplement déduite des CPI historiques sans calibration sur des données de marché, ...).

Courbe d'actualisation

La courbe d'actualisation a été déduite des taux de swaps €str. Complètement collatéralisée, elle est assimilable à une courbe sans risque. Ce point n'est pas essentiel et les mêmes calculs pourraient être réalisés en se basant par exemple sur des swaps Euribors, les spreads de crédit/liquidité seraient d'une autre magnitude mais les taux des zéro-coupons indexés sur l'inflation seraient très voisins de ceux obtenus ici.

Les facteurs d'actualisation sont déduits des deux segments de courbes cotées : le segment court-terme constitué des maturités de zéro à deux ans et le segment long-terme pour les maturités de deux ans à cinquante ans.

Les taux des maturités intermédiaires (i.e. de 16 ans à 19 ans) sont déduits par interpolations linéaires sur les taux connus (cotés).

ST_Curve					LT_Curve					LT_Curve				
M	Maturité	Tx Swap (%)	Discount	Tx Zéro (%)	M	Maturité	Tx Swap (%)	Discount	Tx Zéro (%)	M	Maturité	Tx Swap (%)	Discount	Tx Zéro (%)
1D	04/08/2021	-0.56700	1.000016	-0.576511	3Y	05/08/2024	-0.56139	1.017068	-0.56258	27Y	03/08/2048	0.16022	0.956924	0.16296
1W	10/08/2021	-0.56705	1.000111	-0.576562	4Y	04/08/2025	-0.53394	1.021673	-0.53531	28Y	03/08/2049	0.15586	0.956605	0.15834
2W	17/08/2021	-0.56700	1.000221	-0.576511	5Y	03/08/2026	-0.49806	1.025310	-0.49962	29Y	03/08/2050	0.15152	0.956364	0.15375
1M	03/09/2021	-0.56720	1.000490	-0.576715	6Y	03/08/2027	-0.45260	1.027651	-0.45438	30Y	03/08/2051	0.14720	0.956201	0.14920
2M	04/10/2021	-0.56750	1.000981	-0.577021	7Y	03/08/2028	-0.39893	1.028475	-0.40078	31Y	05/08/2052	0.14220	0.956321	0.14394
3M	03/11/2021	-0.56800	1.001457	-0.577531	8Y	03/08/2029	-0.34039	1.027795	-0.34246	32Y	04/08/2053	0.13728	0.956524	0.13880
4M	03/12/2021	-0.56860	1.001934	-0.578142	9Y	05/08/2030	-0.28073	1.025819	-0.28289	33Y	03/08/2054	0.13238	0.956813	0.13369
5M	03/01/2022	-0.56950	1.002430	-0.579060	10Y	04/08/2031	-0.22054	1.022532	-0.22264	34Y	03/08/2055	0.12748	0.957190	0.12860
6M	03/02/2022	-0.57010	1.002926	-0.579672	11Y	03/08/2032	-0.16225	1.018224	-0.16406	35Y	03/08/2056	0.12259	0.957657	0.12353
7M	03/03/2022	-0.57090	1.003377	-0.580488	12Y	03/08/2033	-0.10592	1.012970	-0.10732	36Y	03/08/2057	0.11774	0.958204	0.11851
8M	04/04/2022	-0.57200	1.003896	-0.581609	13Y	03/08/2034	-0.06219	1.008243	-0.06311	37Y	05/08/2058	0.11289	0.958840	0.11350
9M	03/05/2022	-0.57290	1.004366	-0.582527	14Y	03/08/2035	-0.01633	1.002328	-0.01660	38Y	04/08/2059	0.10809	0.959555	0.10857
10M	03/06/2022	-0.57300	1.004864	-0.582629	15Y	04/08/2036	0.03205	0.995111	0.03264	39Y	03/08/2060	0.10330	0.960358	0.10364
11M	04/07/2022	-0.57450	1.005376	-0.584159	16Y	03/08/2037	0.05421	0.991196	0.05523	40Y	03/08/2061	0.09853	0.961241	0.09876
12M	03/08/2022	-0.57520	1.005866	-0.584873	17Y	03/08/2038	0.07690	0.986750	0.07841	41Y	03/08/2062	0.09376	0.962214	0.09389
18M	03/02/2023	-0.57800	1.008879	-0.587717	18Y	03/08/2039	0.10009	0.981773	0.10213	42Y	03/08/2063	0.08902	0.963269	0.08904
2Y	03/08/2023	-0.58246	1.011752	-0.584165	19Y	03/08/2040	0.12384	0.976239	0.12648	43Y	04/08/2064	0.08427	0.964414	0.08420
					20Y	05/08/2041	0.14817	0.970126	0.15150	44Y	03/08/2065	0.07957	0.965629	0.07944
					21Y	04/08/2042	0.15230	0.967824	0.15562	45Y	03/08/2066	0.07489	0.966928	0.07469
					22Y	03/08/2043	0.15643	0.965443	0.15975	46Y	03/08/2067	0.07023	0.968308	0.06997
					23Y	03/08/2044	0.16061	0.962974	0.16392	47Y	03/08/2068	0.06557	0.969773	0.06526
					24Y	03/08/2045	0.16479	0.960427	0.16812	48Y	05/08/2069	0.06092	0.971321	0.06057
					25Y	03/08/2046	0.16899	0.957801	0.17235	49Y	04/08/2070	0.05633	0.972936	0.05595
					26Y	05/08/2047	0.16458	0.957319	0.16762	50Y	03/08/2071	0.05176	0.974629	0.05136

Dans la feuille Excel jointe, ces données sont exploitées au travers des fonctions de calcul

- DiscountRate(Maturity, Lcurve, Scurve)
- DiscountFactor(Maturity, Lcurve, Scurve)



Courbes d'inflations

Les CPI forwards annuels se déduisent des taux de swaps zéro-coupon et de leurs interpolations.

FRXCPI				EUXCPI				EUXCPI			
M	Maturity	Mid-ZC (%)	Base-CPI	M	Maturity	Mid-ZC (%)	Base-CPI	M	Maturity	Mid-ZC (%)	Base-CPI
1Y	mai-22	1.87750	107.31776	1Y	mai-22	2.15000	109.26986	31Y	mai-52	1.88050	190.58341
2Y	mai-23	1.37625	108.25944	2Y	mai-23	1.71875	110.67869	32Y	mai-53	1.88600	194.50304
3Y	mai-24	1.32500	109.58299	3Y	mai-24	1.57375	112.10022	33Y	mai-54	1.89150	198.52469
4Y	mai-25	1.39250	111.33114	4Y	mai-25	1.59250	113.94849	34Y	mai-55	1.89700	202.65136
5Y	mai-26	1.45000	113.20186	5Y	mai-26	1.61000	115.86286	35Y	mai-56	1.90250	206.88612
6Y	mai-27	1.48375	115.07271	6Y	mai-27	1.61000	117.72825	36Y	mai-57	1.90800	211.23215
7Y	mai-28	1.51750	117.05224	7Y	mai-28	1.62375	119.73704	37Y	mai-58	1.91350	215.69273
8Y	mai-29	1.54125	119.05108	8Y	mai-29	1.62000	121.64535	38Y	mai-59	1.91900	220.27126
9Y	mai-30	1.57500	121.24806	9Y	mai-30	1.64000	123.83514	39Y	mai-60	1.92450	224.97124
10Y	mai-31	1.59750	123.43080	10Y	mai-31	1.65500	126.05191	40Y	mai-61	1.93000	229.79626
11Y	mai-32	1.61875	125.69142	11Y	mai-32	1.67063	128.35489	41Y	mai-62	1.93338	234.54952
12Y	mai-33	1.64000	128.04694	12Y	mai-33	1.68625	130.74009	42Y	mai-63	1.93675	239.41695
13Y	mai-34	1.66750	130.60542	13Y	mai-34	1.70625	133.28502	43Y	mai-64	1.94013	244.40155
14Y	mai-35	1.69500	133.28698	14Y	mai-35	1.72625	135.93287	44Y	mai-65	1.94350	249.50644
15Y	mai-36	1.72250	136.09704	15Y	mai-36	1.74625	138.68777	45Y	mai-66	1.94688	254.73481
16Y	mai-37	1.74000	138.82288	16Y	mai-37	1.75900	141.39280	46Y	mai-67	1.95025	260.08995
17Y	mai-38	1.75750	141.65196	17Y	mai-38	1.77175	144.18667	47Y	mai-68	1.95363	265.57524
18Y	mai-39	1.77500	144.58835	18Y	mai-39	1.78450	147.07256	48Y	mai-69	1.95700	271.19415
19Y	mai-40	1.79250	147.63630	19Y	mai-40	1.79725	150.05376	49Y	mai-70	1.96038	276.95026
20Y	mai-41	1.81000	150.80025	20Y	mai-41	1.81000	153.13369	50Y	mai-71	1.96375	282.84726
21Y	mai-42	1.81775	153.77535	21Y	mai-42	1.81800	156.16288				
22Y	mai-43	1.82550	156.83300	22Y	mai-43	1.82600	159.27699				
23Y	mai-44	1.83325	159.97577	23Y	mai-44	1.83400	162.47871				
24Y	mai-45	1.84100	163.20634	24Y	mai-45	1.84200	165.77081				
25Y	mai-46	1.84875	166.52747	25Y	mai-46	1.85000	169.15616				
26Y	mai-47	1.85500	169.87697	26Y	mai-47	1.85500	172.50559				
27Y	mai-48	1.86125	173.31508	27Y	mai-48	1.86000	175.93860				
28Y	mai-49	1.86750	176.84446	28Y	mai-49	1.86500	179.45754				
29Y	mai-50	1.87375	180.46784	29Y	mai-50	1.87000	183.06481				
30Y	mai-51	1.88000	184.18803	30Y	mai-51	1.87500	186.76292				

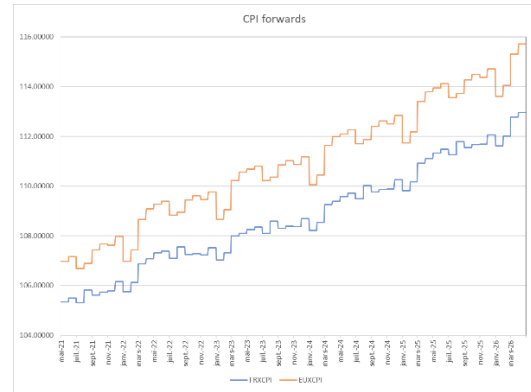
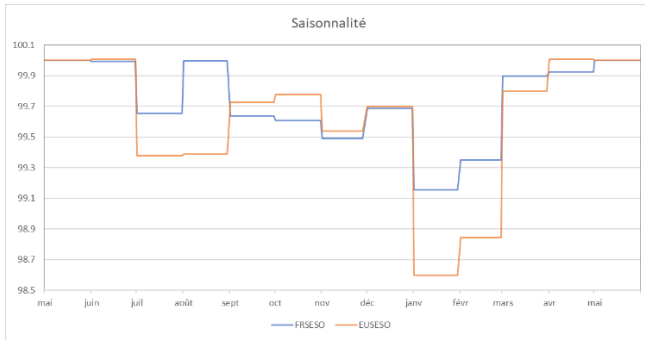
La prise en compte de la saisonnalité permet alors de déterminer les CPI forwards mensuels. La saisonnalité est un décalage périodique relativement stable observable sur l'inflation : i.e. lorsque l'inflation vaut 1.2% / an, l'inflation mensuelle n'est pas égale à 0.1% mais à 0.1% augmenté du coefficient de saisonnalité du mois courant.

Les vecteurs de saisonnalité ont été déduits des séries de CPI historiques observés depuis 2011 mais n'ont pas été recalibrés à partir de cotations de marché spécifiques (i.e. Reset ICAP).

M	Décalage (M-1) → M (facteur additif)												Label
	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre	
Saiso FRF XT	-0.5339%	0.1979%	0.5481%	0.0272%	0.0746%	-0.0073%	-0.3384%	0.3418%	-0.3575%	-0.0336%	-0.1166%	0.1978%	FRSESO
Saiso EUR XT	-1.1100%	0.2495%	0.9589%	0.2105%	-0.0080%	0.0056%	-0.6292%	0.0116%	0.3369%	0.0513%	-0.2385%	0.1613%	EUSESO



RECOMMANDATION DU COMITE DE NORMALISATION OBLIGATAIRE CNOFRANCE.ORG





Spreads de crédit

Dans le cadre de cette présentation, les Z-spreads des OAT indexées sur l'inflation servent de support à l'estimation d'une courbe de crédit/liquidité.

Pour rappel, pour une courbe d'actualisation et une obligation données, le Z-spread est le décalage (translation) de la courbe d'actualisation qui réalise l'égalité du prix de marché et de la valeur actualisée des flux de l'obligation, ce spread est parfois assimilé à un spread de CDS 0-recovery. En pratique, le Z-spread cumule une composante crédit commune à l'ensemble des titres d'un même émetteur et une composante liquidité propre à chaque titre. Dans cette présentation, le panel de calibration est réduit aux obligations indexées, il est suffisant pour assurer le pricing des zéro-coupons indexés mais devrait être complété par les titres nominaux pour calibrer précisément une courbe de crédit valable pour toute classe de liquidité – les obligations indexées étant relativement peu liquides comparativement aux obligations nominales.

InfCurve	Maturity	Coupon (%)	Mkt Rate(%)	Mkt Price	Flat Swap	Z-Sprd (bp)	InfCurve	Maturity	Coupon (%)	Mkt Rate(%)	Mkt Price	Flat Swap	Z-Sprd (bp)
EUXCPI	25-juil.-22	1.10	-2.3920	103.489	103.780	28.0	EUXCPI	25-juil.-30	0.70	-1.7675	124.232	125.669	12.9
FRXCPI	25-juil.-23	2.10	-1.7210	107.747	106.543	-56.6	EUXCPI	25-juil.-31	0.10	-1.6655	119.340	121.562	18.3
EUXCPI	25-juil.-24	0.25	-2.0705	107.198	107.304	3.3	FRXCPI	1-mars-32	0.10	-1.4980	118.479	119.736	10.0
FRXCPI	1-mars-25	0.10	-1.7540	106.905	105.455	-37.6	EUXCPI	25-juil.-32	3.15	-1.6415	158.154	161.109	18.6
EUXCPI	1-mars-26	0.10	-1.9535	109.931	110.264	6.5	FRXCPI	1-mars-36	0.10	-1.3385	123.318	127.129	20.7
EUXCPI	25-juil.-27	1.85	-1.9490	124.330	124.960	8.7	EUXCPI	25-juil.-36	0.10	-1.4130	125.436	130.717	27.3
FRXCPI	1-mars-28	0.10	-1.7395	112.935	112.046	-11.8	EUXCPI	25-juil.-40	1.80	-1.3335	168.191	177.877	32.5
EUXCPI	1-mars-29	0.10	-1.7865	115.452	116.619	13.1	EUXCPI	25-juil.-47	0.10	-1.1740	138.969	157.606	48.3
FRXCPI	25-juil.-29	3.40	-1.7500	144.492	143.444	-9.9							

Un Z-spread est spécifique à l'obligation à laquelle il est rattaché or les zéro-coupons de même maturité issus de démembrements de différentes obligations sont fongibles et donc indiscernables, on adapte donc la modélisation en considérant non plus un ensemble de Z-spreads indépendants mais une courbe de Z-spreads : les décalages de la courbe d'actualisation sont appliqués non plus aux flux d'un titre donné mais à tous les flux de même maturité. Cette approche n'est bien entendu pas applicable à des titres issus d'émetteurs différents ou de classe de liquidité différente. Compte tenu des Z-spreads calculés (cf. tableau), on distingue la courbe de Z-spreads des OATei de celle des OATI. Ces dernières semblent bien plus chères relativement aux courbes de swaps.

Fonctionnellement, les courbes de Z-spread considérées sont constantes par morceaux, les sauts correspondant aux maturités des OAT.

FRZSPR		EUZSPR	
25/07/2023	-57.4	25/07/2022	28.8
01/03/2025	-38.2	25/07/2024	3.3
01/03/2028	-12.0	01/03/2026	6.6
25/07/2029	-9.1	25/07/2027	8.7
01/03/2032	10.1	01/03/2029	13.3
01/03/2036	21.1	25/07/2030	13.2
		25/07/2032	19.7
		25/07/2036	27.8
		25/07/2040	34.4
		25/07/2047	49.1

Remarque : comme évoqué plus tôt le flux remboursement des OAT indexée est nanti d'une clause de protection du capital dont la valeur n'est pas nulle - mais tend à diminuer rapidement lorsque l'inflation reste positive. Pour être parfaitement précis, la valeur forward du floor 0% implicite à la protection du capital doit être ajouté à la valeur forward du flux de remboursement préalablement à l'évaluation du spread de crédit/liquidité car cette option est spécifique au flux terminal. Faute



**RECOMMANDATION DU COMITE DE NORMALISATION OBLIGATAIRE
CNOFRANCE.ORG**

d'éléments de pricing (nappe de volatilité cap/floor), le calcul présenté n'inclut pas cet élément et affiche donc un crédit émetteur légèrement meilleur que le crédit calculé floor inclus.

Pricing des ZC

En assemblant les différents éléments : actualisation, crédit/liquidité et inflation, on en déduit les prix des zéro-coupons indexés sur l'inflation.

Les prix et taux sont donnés en valeur réelles conformément à l'usage sur les OAT. A titre indicatif, on a rajouté les prix nominaux sur les zéro-coupons des échéances juillet indexés sur l'inflation européenne.

FRXCPI			EUXCPI			EUXCPI			
Maturité	Px réel	Tx Réel	Maturité	Px réel	Tx Réel	Maturité	Px réel	Tx Réel	Px Nom
01/03/2022	101.44	-2.448	01/03/2022	101.10	-1.888	25/07/2022	102.39	-2.397	109.54
01/03/2023	103.95	-2.431	01/03/2023	103.08	-1.907	25/07/2023	104.04	-1.985	111.30
01/03/2024	105.74	-2.143	01/03/2024	105.37	-2.010	25/07/2024	106.43	-2.072	113.86
01/03/2025	108.19	-2.178	01/03/2025	107.43	-1.984	25/07/2025	108.49	-2.029	116.06
01/03/2026	109.51	-1.966	01/03/2026	109.45	-1.955	25/07/2026	110.52	-1.990	118.24
01/03/2027	111.79	-1.979	01/03/2027	111.36	-1.912	25/07/2027	112.46	-1.946	120.32
01/03/2028	113.98	-1.970	01/03/2028	113.28	-1.879	25/07/2028	114.01	-1.862	121.97
01/03/2029	115.81	-1.919	01/03/2029	114.64	-1.787	25/07/2029	115.60	-1.801	123.67
01/03/2030	115.90	-1.706				25/07/2030	117.32	-1.764	125.51
01/03/2031	117.58	-1.677				25/07/2031	118.24	-1.666	126.50
01/03/2032	119.14	-1.643				25/07/2032	119.53	-1.612	127.87
01/03/2033	119.13	-1.501				25/07/2033	120.88	-1.571	129.32
01/03/2034	120.58	-1.477				25/07/2034	122.38	-1.545	130.93
01/03/2035	122.09	-1.460				25/07/2035	123.83	-1.518	132.48
01/03/2036	123.57	-1.442				25/07/2036	123.73	-1.412	132.36
						25/07/2037	123.94	-1.334	132.59
						25/07/2038	125.37	-1.323	134.13
						25/07/2039	126.80	-1.312	135.65
						25/07/2040	128.21	-1.301	137.16
						25/07/2041	125.87	-1.145	134.66
						25/07/2042	127.42	-1.148	136.31
						25/07/2043	129.00	-1.152	138.01
						25/07/2044	130.61	-1.156	139.73
						25/07/2045	132.26	-1.159	141.49
						25/07/2046	133.93	-1.163	143.28
						25/07/2047	135.84	-1.172	145.32

En tenant compte du spread de crédit on peut vérifier les taux réels calculés en les estimant par relation de Fischer :

$$1 + \tau_{réel} = \frac{(1 + \tau_{nominal})(1 + s_{credit})}{(1 + \tau_{inflation})}$$

Ou même son développement au premier ordre : $\tau_{réel} \approx \tau_{nominal} + s_{credit} - \tau_{inflation}$

Sur le coupon inflation française du 25/07/2022 le développement au premier ordre donne un taux réel annuel de l'ordre de -2.954% ($\tau_{nominal} : -0.585\%$ $s_{credit} : -0.574\%$ et $\tau_{inflation} : 1.644\%$ saisonnalité incluse) qui confirme la vraisemblance du taux calculé : -2.959%.

De même, sur le coupon inflation européenne du 25/07/2047 : de la relation de Fisher on s'attend à un taux réel annuel proche de -1.184% ($\tau_{nominal} : 0.168\%$ $s_{credit} : 0.491\%$ et $\tau_{inflation} : 1.865\%$ saisonnalité incluse) qui valide bien le taux calculé : -1.172%.



**RECOMMANDATION DU COMITE DE NORMALISATION OBLIGATAIRE
CNOFRANCE.ORG**

La qualité du calcul exact ou des approximations de Fisher dépend bien évidemment de la qualité du calcul de Z-Spread. Les spreads de crédit/liquidité n'étant pas publiés sur les OAT indexées sur l'inflation il est difficile de s'affranchir de cette étape dans le calcul. En revanche la manipulation des courbes d'actualisation et d'inflation sont parfaitement maîtrisées par les acteurs du marché et ne demandent pas de développements spécifiques.