

## Conversion des dates en durées

### Durées exprimée en nombres entiers de jours

Le calcul de la durée exprimée en nombre de jours entre deux dates quelconques ne présente pas de difficulté, mais l'examen de la procédure est intéressant pour bien voir les difficultés à résoudre et les contraintes à imposer avec d'autres unités de temps.

Chaque date  $D$  exprimée en JJ/MM/AAAA est transformée en date entière  $DE$  ; la date  $D_G$  correspondant à la date entière  $DQE_G(D_G) = 0$  est dite « date génératrice ». La date quotidienne entière  $DQE_G(D)$  correspondant à la date  $D$  est égale au nombre algébrique exact de jours entre la date génératrice  $D_G$  (incluse) et la date  $D$  (exclue). On décompte positivement les jours si  $D$  est postérieure à  $D_G$ , négativement si  $D$  est antérieure à  $D_G$ . On appelle « grille quotidienne entière » l'ensemble des dates quotidiennes entières associée à une date génératrice.

La durée en nombre de jours  $d_{JG}(D_1, D_2)$  est donnée simplement par :

$$d_{JG}(D_1, D_2) = DQE_G(D_2) - DQE_G(D_1) \quad .$$

Cette conversion très simple possède trois propriétés importantes :

- Elle est transitive, c'est-à-dire qu'entre 3 dates quelconques  $D_1, D_2$  et  $D_3$  :

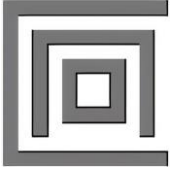
$$d_{JG}(D_1, D_3) = d_{JG}(D_1, D_2) + d_{JG}(D_2, D_3) \quad .$$

- Sur la période d'un coupon, la durée quotidienne est constante (égale à 1), ce qui correspond bien à la régularité quotidienne du calcul des intérêts, qu'ils soient simples ou composés.
- La durée entre deux dates est indépendante du choix de la date génératrice. En effet entre les dates quotidiennes entières  $DQE_G$  et  $DQE_{G'}$  associées respectivement aux dates génératrices  $D_G$  et  $D_{G'}$ , on a les relations :

$$DQE_{G'}(D) = DQE_G(D) - DQE_G(D_{G'}) \quad ,$$

$$\begin{aligned} d_{JG'}(D_1, D_2) &= DQE_{G'}(D_2) - DQE_{G'}(D_1) \\ &= DQE_G(D_2) - DQE_G(D_{G'}) - DQE_G(D_1) + DQE_G(D_{G'}) \\ &= DQE_G(D_2) - DQE_G(D_1) = d_{JG}(D_1, D_2) \end{aligned} \quad .$$

La transitivité des durées est donc vérifiée, même si les durées entre dates sont mesurées sur des grilles quotidiennes entières différentes. En particulier, la valeur absolue de la durée est indépendante du sens du décompte des jours (« avancée du temps » ou « remontée du temps ») :  $d_{JG'}(D_{G'}, D_G) = -d_{JG}(D_G, D_{G'})$

Durées exprimées en nombres décimaux d'années

Les propriétés précédentes, évidentes pour les durées exprimées en jours, ne sont malheureusement pas toujours vérifiées lorsque les durées sont exprimées en années ou en unités de temps infra-annuelles (semestres, trimestres, mois). Ceci vient de la non-proportionnalité du jour et de l'année (365 ou 366), du semestre (181 à 184), du trimestre (69 à 92) ou du mois (28 à 31). On ne traite ici que le cas annuel, les cas semestriel, trimestriel ou mensuel relevant exactement des mêmes raisonnements (qualitativement, car quantitativement les écarts de durée qui sont inférieurs à 0.3 % sur l'année, atteignent 1.6 % sur le semestre, 3.3 % sur le trimestre et plus de 10 % sur le mois).

Le principe de base de conversion des dates en durée reste le même que pour les durées en jours : on établit une correspondance entre les dates  $D$  exprimées en JJ/MM /AAAA et une grille de dates annuelles décimales  $DAD_G(D)$  construite sur une date génératrice  $D_G$  telle que  $DAD_G(D_G) = 0$  ; on calcule alors les durées en années  $d_{AG}(D_1, D_2)$  par :

$$d_{AG}(D_1, D_2) = DAD_G(D_2) - DAD_G(D_1) \quad .$$

La correspondance entre les dates  $D$  et les dates annuelles décimales  $DAD_G$  est établie sur le principe des dates anniversaires annuelles (années glissantes) : si  $D_G = JJ_G / MM_G / AAAA_G$  :

$$DAD_G(D_{Gak} = JJ_G / MM_G / AAAA_G + k) = k \quad ;$$

si la date  $JJ_G / MM_G / AAAA_G + k$  n'existe pas (par exemple si  $D_G$  est un 29 février) on lui substitue comme date anniversaire la date existante du même mois immédiatement inférieure (mais il est recommandé d'éviter autant que possible un choix de date génératrice qui impose cette substitution). Les dates anniversaires de la date génératrice sont appelées « dates d'appui ».

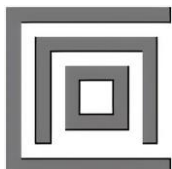
Les dates annuelles décimales non-entières correspondant aux dates non-anniversaires sont calculées par interpolation linéaire entre les dates d'appui qui les encadrent. Si :

$$D_{Gak} = JJ_G / MM_G / AAAA_G + k \leq D = JJ / MM / AA < D_{Gak+1} = JJ_G / MM_G / AAAA_G + k + 1 ,$$

alors la date annuelle décimale  $DAD_G(D)$  est égale à :

$$DAD_G(D) = k + \frac{nj}{nj_{Ak}} \quad ,$$

où  $nj$  est le nombre de jours exact entre la date d'appui  $D_{Gak}$  (incluse) et la date  $D$  (exclue) et  $nj_{Ak}$  est le nombre de jours exact entre la date d'appui  $D_{Gak}$  (incluse) et la date d'appui suivante  $D_{Gak+1}$  (exclue).



On notera que les dates annuelles décimales des dates postérieures à la date génératrice sont positives (avancée du temps) et que les dates annuelles décimales antérieures à la date génératrice sont négatives (remontée du temps).

La transitivité des durées annuelles décimales calculées sur la même grille est vérifiée, comme dans le cas des durées quotidiennes entières.

En revanche la durée quotidienne n'est plus une constante sur l'ensemble de la grille (elle vaut selon le cas 1/365 ou 1/366). Elle reste toutefois constante entre deux dates d'appui.

De plus, et surtout, les durées annuelles décimales mesurées entre deux dates sur des grilles différentes peuvent être différentes (pour être toujours identique, il faut que chacune des deux dates soit à plus d'un an de distance du 29 février le plus proche, soit environ 1 chance sur 2 pour chaque date et 1 chance sur 4 pour un couple quelconque). La transitivité des durées n'est plus toujours vérifiée si les durées sont mesurées sur des grilles génératrices différentes (la non-transitivité est le cas le plus fréquent).

En particulier la durée entre les dates  $D_1$  et  $D_2$  ( $D_1 < D_2$ ) mesurée en prenant  $D_1$  pour date génératrice (avancée du temps) est le plus souvent différente de la durée entre les mêmes dates mesurée en prenant pour date génératrice  $D_2$  (remontée du temps). Par exemple :

$$D_1 = 12/12/2005 ; D_2 = 25/06/2008 ;$$

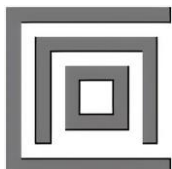
$$d_{AD1}(D_1, D_2) = 2.53552 \text{ ans} ; d_{AD2}(D_1, D_2) = 2.53425 \text{ ans} ; \text{écart} : 0.00127 \text{ ans} ;$$

avec une autre date génératrice, par exemple le 03/02/2007, on obtiendrait encore un résultat différent ( 2.53592 ans ). Les écarts sont faibles (inférieurs à une journée, mais ils pourraient être plus importants en unités de temps infra-annuelles) mais pas véritablement négligeables, surtout pour des calculs par différence.

Toutefois, les durées annuelles entières restant toujours transitives entre elles, les durées annuelles décimales entre deux dates mesurées sur des grilles distinctes dont les dates génératrices sont des dates anniversaires l'une de l'autre sont toujours identiques ; la transitivité des durées annuelles décimales mesurées sur de telles « grilles anniversaires » reste donc toujours vérifiée.

Pour que deux calculateurs utilisant des durées annuelles décimales trouvent le même résultat, il est donc nécessaire qu'ils utilisent les mêmes conventions de choix de dates génératrices (ou tout au moins des conventions compatibles).

Dans l'absolu, pour mesurer la durée annuelle décimale entre deux dates, il n'y a pas de choix privilégié de date génératrice (encore qu'on puisse trouver plus simple d'utiliser l'une des deux dates comme date génératrice) ; en particulier il n'y a aucune raison de préférer a priori l'avancée du temps ou la remontée du temps.



Dans la pratique une mesure de durée est rarement isolée, tant dans l'espace des dates échéances (calculs globaux sur un échéancier) que dans celui du temps courant (séries chronologiques, calculs au comptant et à terme, etc.). Il est alors nécessaire d'assurer la cohérence entre les différentes mesures de durées, et, en particulier, leur transitivité. Il est donc nécessaire d'appuyer les différents calculs de conversion sur une grille de dates décimales fixes, ou, tout au moins sur des grilles compatibles en transitivité (décalées de durées annuelles entières).

### Application en finance des durées annuelles décimales

Dans le cas des échéanciers de taux, les durées annuelles décimales sont surtout utilisées dans les calculs d'actualisation et de taux de rendement ainsi que pour le calcul des montants des coupons pleins et des coupons courus.

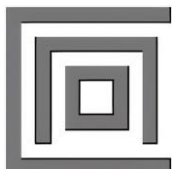
L'actualisation d'un échéancier (à taux constant ou par une structure des taux zéro-coupon) et le calcul réciproque de taux de rendement imposent, pour rester cohérent, la stabilité de la distribution des flux de l'échéancier et, en particulier, des durées inter-échéances qui doivent rester constantes sur l'ensemble des calculs. Les maturités de flux utilisées dans les calculs correspondent à des durées entre une date variable (la date de calcul et/ou la date d'actualisation) et des dates fixes (échéances des flux)

Prendre la date de calcul ou la date d'actualisation comme date génératrice impliquerait nécessairement l'incompatibilité des calculs aux dates successives en raison de la non-transitivité des grilles annuelles décimales successives. Pour un même échéancier, d'un jour sur l'autre, la maturité de certains flux diminuerait de  $1/365^{\text{ème}}$  d'année et celles d'autres flux de  $1/366^{\text{ème}}$ , modifiant les durées inter-échéances (sur un jour la différence est faible, mais elle peut s'accumuler sur près d'une année). Ceci interdirait en particulier le portage de la valeur actuelle et l'actualisation à terme qui impliquent que la durée du portage entre termes soit identique pour tous les flux (le coefficient de portage doit être le même pour tous les flux).

Il faut donc appuyer la mesure des maturités sur des dates fixes. Encore faut-il n'utiliser comme dates génératrices qu'une même date fixe pour tous les flux de l'échéancier, ou des dates anniversaires. La transitivité est ainsi vérifiée.

Toutefois cela ne suffit pas, toute date génératrice fixe n'étant pas équivalente : la mesure des durées d'actualisation doit aussi, dans la mesure du possible, être cohérente avec la mesure des durées utilisée pour le calcul du montant des flux et, en particulier, du montant des intérêts des coupons. Or, coupon atypique long mis à part, le calcul des montants d'intérêts des coupons (simples ou composés) implique que, sur la période d'un coupon, chaque jour a un poids, et donc une durée, identique. Le calcul des coupons courus obéit d'ailleurs à un principe identique.

En particulier la mesure de la durée annuelle décimale de la période d'un coupon annuel doit être égale à 1, ce qui n'est toujours vérifié si les dates annuelles décimales de début et de fin de période sont entières (la durée annuelle décimale entre deux dates



anniversaires non entières n'est pas égale à 1 si l'une des deux périodes entières contient un 29 février).

Il faut donc choisir une date génératrice telle que, dans la mesure du possible, chaque période de coupon soit confondue ou incluse dans une période entière des dates annuelles décimales. Ceci ne pose pas de problème pour un échancier strictement périodique annuel : il suffit de prendre la date d'échéance d'un flux comme date génératrice commune (par exemple la date de premier coupon ou la date de maturité) ou, si l'on préfère, la date d'échéance de chaque flux.

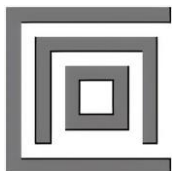
Dans le cas d'un échancier quasi-périodique avec un premier coupon atypique, l'échéance de ce premier coupon reste une date anniversaire des autres échéances. La méthode s'applique donc sans modification. Le seul cas délicat est l'actualisation avant règlement (rare), la date annuelle décimale du flux de règlement étant alors non-entière. Il suffit d'éviter de calculer sa maturité en s'appuyant sur son échéance comme date génératrice.

On note que la méthode proposée (date génératrice fixe s'appuyant sur l'une des échéances périodiques) correspond exactement à la technique des pseudo-périodes préconisée pour le traitement des premiers coupons atypiques courts ou longs : les dates entières ne correspondant pas à des flux sont les pseudo-coupons et les intervalles entiers correspondants sont les pseudo-périodes.

La méthode s'applique aussi aux échanciers quasi-périodiques avec dernier coupon atypique. Il faut alors éviter comme date génératrice la date de maturité, qui impliquerait toutes les échéances des coupons précédents ne seraient pas entières (on prendra par exemple la date du premier ou de l'avant-dernier coupon comme date génératrice - elles aboutissent bien entendu au même résultat). La période du dernier coupon atypique a alors une durée annuelle décimale non-entière mais constante, quelle que soit la date de calcul. Pour les derniers coupons atypiques courts (c'est-à-dire de durée inférieure à celle de la période principale) la constance de la durée quotidienne est assurée. Dans le cas (en principe très rare) d'un dernier coupon atypique long, la méthode rejette la partie fractionnaire en fin de période, ce qui évite le risque d'associer dans les durées le même 29 février à deux coupons successifs (ce qui serait contraire au mode de calcul des intérêts, mais qui pourrait se produire si la partie fractionnaire était située en début de période).

La méthode de conversion à date génératrice identique ou anniversaire s'applique de la même manière aux échanciers périodiques ou quasi-périodiques infra-annuels (semestriels, trimestriels, mensuels). Il suffit de prendre comme unité entière de temps la période correspondante et de généraliser le calcul des dates anniversaires associées à cette période. Les taux associés à ces mesures de durée sont les taux périodiques infra-annuels de durée correspondante.

On peut aussi - cela aboutit exactement aux mêmes résultats - reconvertir les durées infra-annuelles décimales en durées annuelles décimales équivalentes (en divisant les durées semestrielles par 2, les durées trimestrielles par 4 et les durées mensuelles par 12), les taux associés étant alors les taux annuels équivalents (en taux composés) aux taux périodiques



infra-annuels. Attention toutefois au risque de confusion entre durées annuelle décimales (mesurées directement en années) et durées annuelles décimales équivalentes (mesurées par l'intermédiaire des périodes infra-annuelles) qui sont différentes entre deux dates données sauf si ces dernières sont anniversaires annuelles.

Cette méthode est recommandée pour les échéanciers à période infra-annuelle à taux fixe, et, plus généralement, pour les échéanciers à période infra-annuelle dont le calcul des coupons est lié à la période et non au nombre de jours qu'elle contient. Pour les échéanciers à période infra-annuelle taux flottant et référence monétaire dont le montant du coupon dépend du nombre de jours exacts de la période, le calcul annuel, à défaut d'un calcul plus spécifique, reste préférable.

La méthode générale ci-dessus peut aussi être appliquée aux échéanciers apériodiques. Il faut toutefois dans chaque cas choisir la date génératrice la mieux (ou la moins mal) adaptée aux caractéristiques propres de l'échéancier. Il ne sera pas toujours possible de faire coïncider le calcul des maturités avec celui des coupons. Il importe toutefois de conserver au moins la transitivité.

Le cas des emprunts apériodiques (autre que les emprunts à coupon unique ou zéro-coupon qui ne présentent pas de difficulté) est en principe exceptionnel. Mais les portefeuilles mélangeant des emprunts de maturités quelconques ont des échéanciers globaux apériodiques. Il est difficile de faire dans ce cas des recommandations générales, la meilleure procédure à adopter dépendant de l'application des calculs. Dans certains cas (asset management par exemple) il sera souvent préférable (et plus simple) d'effectuer les calculs (actualisation, indicateurs de risque ou de rendement, etc.) propres à chaque titre indépendamment avec une date génératrice adaptée au titre traité, puis de les assembler au sein du portefeuille malgré le défaut de transitivité inter-titres. Dans d'autres cas où l'analyse flux à flux est importante (micro-couverture, asset swap, ajustement actif/passif, etc.) il pourra être préférable de traiter globalement le portefeuille comme un échéancier unique, même apériodique, et de choisir une date génératrice fixe adaptée.

Le cas de la norme 30E/360 est un cas particulier. Malgré ses nombreux défauts, en particulier sa déconnection avec les produits financiers qui n'utilisent pas cette norme et qui peuvent perturber fortement les calculs d'arbitrage, le souci de cohérence conduit à recommander pour les produits dont le calcul des intérêts suit exclusivement cette norme (pas d'intérêts versés au titre du 30 des mois de 31 jours, 3 jours d'intérêts versés au titre du 28 février, ...) de calculer les durées d'actualisations selon la même norme : calcul du nombre exact de jours 30E/360 et division par 360 pour obtenir la durée décimale en années. Cependant ce mode de calcul doit être abandonné dès lors qu'intervient un élément extérieur à cette norme.